Ασκήσεις πάνω στην Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής.

Ασκηση 1η

Εστω $a \in \mathbb{R}$, όπου $-1 < a \neq 0$. ΝΔΟ για όλους τους θετικούς ακεραίους ν, με $\nu \geq 2$, ισχύει $(1+a)^\nu > 1+\nu a$ (Ανισωση Bernoulli)

ΛΥΣΗ

Εστω $P(\nu)$ πρόταση, η ανισότητα που θα δείξουμε ότι ισχύει

- Για $\nu=2$, η ανισότητα γίνεται: $(1+a)^2 > 1+2a \Rightarrow$
  $\Rightarrow 1+2a+a^2 > 1+2a \Rightarrow a^2 > 0$ ισχύει $\forall a \neq 0$
- Εστω ότι η $P(k)$ αληθής και ΘΔΟ η $P(k+1)$ αληθής, επίσης.
  Δηλ. αν $(1+a)^k > 1+ka \Rightarrow (1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a$
  Έχουμε, διαδοχικά:
  $$(1+a)^k > 1+ka \overset{a \neq -1}{\Rightarrow} (1+a)^k \cdot (1+a) > (1+ka)(1+a) \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow (1+a)^{\nu+1} > 1+a+ka+k^2 \cdot a \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow (1+a)^{\nu+1} > 1+a(k+1)+\nu^2 \cdot a \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow (1+a)^{\nu+1} > 1+(\nu+1)a, \text{ αφού } \nu \cdot a^2 > 0$$

Αρα, η ανίσωση Bernoulli ισχύει $\forall \nu \geq 2$

Ασκηση 2η

ΝΔΟ $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύουν:

i) $1^2+2^2+\dots+\nu^2 = \dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$, ii) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dots+\dfrac{1}{\nu(\nu+1)} = \dfrac{\nu}{\nu+1}$

iii) $2^3+4^3+6^3+\dots+(2\nu)^3 = 2\nu^2(\nu+1)^2$

ΛΥΣΗ

i) • $P(1)$ αληθής διότι $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} \Rightarrow 1 = \dfrac{6}{6} = 1$ ισχύει

• Έστω ότι $P(k)$ αληθής και ΘΔΟ η $P(k+1)$ αληθής.

Αρα, $1^2+2^2+\dots+k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

και ΘΔΟ:

$$1^2+2^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Πράγματι, έχουμε:

$$1^2+2^2+\dots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Άρα, η $P(\nu)$ αληθεύει $\forall \nu \geq 1$

ii) • $P(1)$ αληθής, αφού $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ ισχύει

• Έστω $P(k)$ αληθής και ΘΔΟ $P(k+1)$ αληθής

Άρα, $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

και ΘΔΟ

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

Πράγματι, έχουμε:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{(k+2)k+1}{(k+2)(k+1)}=\frac{(k+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(k+1)}(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

Άρα, η $P(\nu)$ αληθής $\forall \nu \geq 1$

iii) Αφήνεται ως εξάσκηση (όμοια με τα παραπάνω)

Εφαρμογή επίσης για εξάσκηση
ΝΔΟ $\forall \nu \in \mathbb{Z}$ θετικό ισχύει ότι

$$1+x+x^2+\dots+x^{\nu-1}=\frac{x^\nu-1}{x-1},\ x\neq 1$$

Ασκηση 3η

1) Να αποδείξετε ότι $\forall \nu \in \mathbb{Z}$, θετικό με $\nu \geq 4$, ισχύει ότι $\nu! > 2^{\nu}$, όπου $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu$

2) Να αποδείξετε ότι $\forall \nu \in \mathbb{Z}$, θετικό, ισχύει ότι: $3^{\nu} + 5^{\nu} \geq 2^{2\nu+1}$.

ΛΥΣΗ

1) • $P(4)$ αληθεύει διότι $4! > 2^4 \Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 16 \Rightarrow 24 > 16$ ισχ-

• Έστω $P(k)$ αληθής και ΘΔΟ $P(k+1)$ αληθής

$k! > 2^k$ και ΘΔΟ $(k+1)! > 2^{k+1}$

Αφού, $k! > 2^k \Rightarrow (k+1)\,k! > 2^k \cdot (k+1)$ αφού $k > 0$

$\Rightarrow (k+1)! > 2^k (k+1) > 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$.

(αφού $(k+1) > 2 \Rightarrow k > 1$).

Άρα, η $P(\nu)$ αληθής $\forall \nu \geq 4$.

2) • $P(1)$ αληθεύει διότι $3^1 + 5^1 \geq 2^{2\cdot 1+1} \Rightarrow 8 \geq 8$ ισχύει

• Έστω $P(k)$ αληθής και ΘΔΟ $P(k+1)$ αληθής

$3^k + 5^k \geq 2^{2k+1}$ και $3^{k+1} + 5^{k+1} \geq 2^{2(k+1)+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{k+1} + 5^{k+1} \geq 2^{2k+3}$.

Αφού, $3^k + 5^k \geq 2^{2k+1} \Rightarrow 2^2 \cdot 3^k + 2^2 \cdot 5^k \geq 2^{2k+1} \cdot 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot 3^k + 4 \cdot 5^k \geq 4 \cdot 2^{2k+1} \Rightarrow 4 \cdot 3^k + 4 \cdot 5^k \geq 2^{2k+3}$ ①.

Αρκεί, νδο $3^{k+1} + 5^{k+1} \geq 4 \cdot 3^k + 4 \cdot 5^k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^{k+1} - 4 \cdot 5^k \geq 4 \cdot 3^k - 3^{k+1} \Leftrightarrow 5^{\nu} \geq 3^{\nu}$, $\nu \geq 1$ ισχύει.

Άρα, ① $3^{k+1} + 5^{k+1} \geq 2^{2k+3}$

Επομένως, η $P(\nu)$ αληθής $\forall \nu \geq 1$

ΑΣΚΗΣΗ 4η

Να αποδείξετε ότι

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2\nu-1}\right)>\sqrt{2\nu+1}\qquad \forall \nu\geq 1$$

ΛΥΣΗ

- Η παραπάνω πρόταση ισχύει για $P(1)$ εφόσον $1+\frac{1}{1}>\sqrt{2+1}$ ισχύει.

- Εάν ότι η $P(k)$ αληθεύει και ΘΔΟ η $P(k+1)$ επίσης αληθεύει

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)>\sqrt{2k+1}\qquad (1)$$

και

ΘΔΟ

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)>\sqrt{2k+3}$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε την (1) με $\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)$ τότε αφού $k\geq 1$, έχουμε

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)>\sqrt{2k+1}\cdot\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)$$

Αρκεί, λοιπόν νδο:

$$\sqrt{2k+1}\cdot\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)>\sqrt{2k+3}\Leftrightarrow\sqrt{2k+1}\cdot\frac{2k+2}{2k+1}>\sqrt{2k+3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2k+2}{\sqrt{2k+1}}>\sqrt{2k+3}\Leftrightarrow 2k+2>\sqrt{2k+3}\sqrt{2k+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2k+2)^2>(2k+3)(2k+1)\Leftrightarrow 4k^2+8k+4>8k+4k^2+3$$

που ισχύει

Άρα, η $P(\nu)$ αληθεύει $\forall \nu\geq 1$.

Άσκηση 5η

Δίνεται η ακολουθία Fibonacci τέτοια ώστε

$F_1 = F_2 = 1$ και $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \geq 2$

ΝΔΟ

i) $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$

Να υπολογιστεί:

ii) $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = ;$

ΛΥΣΗ

i) • Για $n=1$, έχουμε $F_1 = 1$ και $F_{1+2} = F_3 = 2$

Τότε $F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1$. Άρα, αληθεύει για $n=1$ η παραπάνω πρόταση

• Έστω ότι ισχύει για ισχύει η $P(n)$ πρόταση (αληθεύει)

Άρα, $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$

και ΘΔΟ $F_1 + F_2 + \dots + F_n + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$, (δηλ $P(n+1)$ αληθής)

Όπως $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \Rightarrow F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$, $\forall n \geq 0$

$F_1 + F_2 + \dots + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+1} + F_{n+2} - 1 = F_{n+3} - 1$

$= F_{(n+1)+2} - 1$. Άρα, $P(n+1)$ αληθής πρόταση

ii) $F_1 = F_2 = 1$, $F_4 = 3$, $F_6 = 8$, $F_8 = 21$

$F_3 = 2$, $F_5 = 5$, $F_7 = 13$, $F_9 = 34$

Παρατηρούμε ότι:

$F_2 = 1 = F_3 - 1 = F_{2\cdot 1+1} - 1$

$F_2 + F_4 = 4 = F_5 - 1 = F_{2\cdot 2+1} - 1$

$F_2 + F_4 + F_6 = 12 = F_7 - 1 = F_{2\cdot 3+1} - 1$

$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 = F_9 - 1 = F_{2\cdot 4+1} - 1$

$\vdots$

Προκύπτει ότι, $F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ (*)

• Για $1 \leq n \leq 4$ η (*) αληθεύει

• Έστω ισχύει η (*) και ΘΔΟ ισχύει για $n+1$ η πρόταση

$F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} + F_{2(n+1)} = F_{2n+1} - 1 + F_{2(n+1)} = F_{2n+1} + F_{2n+2} - 1 =$

$= F_{2n+3} - 1 = F_{2(n+1)+1} - 1$. Άρα, $P(n+1)$ αληθεύει!